Диэлектрическая проницаемость комплексна.

Мы не будем разбираться, почему: это мы узнаем, когда будем готовиться к экзамену. Сейчас, перед КР2, нам достаточно знать то, что её действительную часть обозначают как ε^{I}, мнимую как ε^{II}.

Они не независимы, а связаны соотношениями Крамерса-Кронига. По ним зная действительную или мнимую часть, можно подсчитать другую:

$$\varepsilon'(\omega) = 1 + \frac{1}{\pi} \fint_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon''(x)}{x-\omega} dx.$$

$$\varepsilon''(\omega) = -\frac{1}{\pi} \fint_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon'(x)-1}{x-\omega} dx.$$

Знак интеграла перечёркнутый, и это неслучайно: интеграл не простой, а в смысле главного значения (т.е. левая и правая границы интегрирования стремятся к бесконечности не независимо, а синхронно: от -1 до 1, от -2 до 2, от -1000 до 1000, от -100500 до 100500 и т.д.).
Т.е. под главным значением имеется в виду вот такой интеграл:

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} f(x)dx$$

Иногда вместо перечёркивания интеграла пишут «v.p.» (в переводе с французского – «главное значение»). Я, например, буду так делать.

Типовая задача с КР:

2. Пользуясь соотношениями Крамерса-Кронига, найти мнимую часть диэлектрической проницаемости, если

$$\varepsilon' = 1 + \frac{\alpha}{\omega^2 + \nu^2},$$

где α и ν — постоянные.

Как вы понимаете, задачи двух типов: по ε^{I} вычислить ε^{II} (как в данной задаче) или наоборот.

И что, нужно тупо считать интеграл? Не совсем, есть нюансы.

Применяем формулу:

$$\varepsilon''(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon'(x) - 1}{x - \omega} dx$$

И подставляем туда $\varepsilon^I(x)$. Нюанс первый: при подстановке нужно везде, где в формуле была ω, заменить её на x.

С чем это связано? В условии это не сказано, но ε функция ω. Можно написать так: $\varepsilon'(\omega) = 1 + \frac{a}{\omega^2 + \nu^2}$. Диэлектрическая проницаемость есть функция частоты падающего синусоидального света. А в интеграле у нас ε(x). Вот и нужно заменять x на ω.

Т.е. будет не так

$$\frac{1}{\pi} v.p. \int \frac{a}{(\omega^2 + \nu^2)(x - \omega)} dx$$

А так:

$$\frac{1}{\pi} v.p. \int \frac{a}{(x^2 + \nu^2)(x - \omega)} dx$$

ω в знаменателе заменять не надо, т.к. x-ω было ещё до подстановки $\varepsilon^I(x)$, заменять ω на x нужно именно в $\varepsilon^I()$.

Константу можно вынести за знак интеграла:

$$\frac{a}{\pi} v.p. \int \frac{dx}{(x^2 + \nu^2)(x - \omega)}$$

Осталось взять этот интеграл! Все семинаристы берут его вычетами.
Я не люблю и не знаю ТФКП. Полагаю, читатель тоже. Поэтому будем учиться решать задачи Крамерса-Кронига без вычетов ☺

Замечу, что у этого интеграла есть первообразная в элементарных функциях, которая ищется Вольфрамом (уже после домножения на a/π):

$$F(x) = -\frac{ln(\nu^2 + x^2) - 2\nu \ln(x - \omega) + 2\omega arctg(\frac{x}{\nu})}{2\pi(\nu^2 + \omega^2)}$$

Теперь давайте сделаем подстановки на +бесконечности и –бесконечности, причём учитывая синхронность пределов:.

$$\lim_{N\to\infty} F(N)-F(-N)$$
$$= -\frac{1}{2\pi(\nu^2+\omega^2)}\left(ln(\nu^2+N^2) - ln(\nu^2+(-N)^2) - 2\nu\ln(N-\omega) + 2\nu\ln(-N-\omega) + 2\omega * \frac{\pi}{2} - 2\omega * \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

(Я сразу подставил арктангенс $\frac{\pi}{2}$ на $+\infty$ и $-\frac{\pi}{2}$ на $-\infty$).

$ln(\nu^2+N^2) - ln(\nu^2+(-N)^2)$ взаимоуничтожатся, останутся

$$\lim_{N\to\infty} F(N)-F(-N) = -\frac{1}{2\pi(\nu^2+\omega^2)}\left(2\nu\ln(N-\omega) + 2\nu\ln(-N-\omega) + 2\omega\pi\right)$$

Преобразуем разность логарифмов в произведение:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{-\pi(\nu^2+\omega^2)}\left(\nu\ln\frac{N-\omega}{N+\omega} + \omega\pi\right)$$

При стремлении N->+∞ аргумент логарифма будет стремиться к 1, а сам логарифм к 0. В итоге получаем

$$\frac{-\omega}{\nu^2+\omega^2}$$

Подставляем вычисленный интеграл в

$$\frac{a}{\pi} v.p.\int \frac{dx}{(x^2+\nu^2)(x-\omega)}$$

И получаем ответ:

$$\frac{-\omega a}{\pi(\nu^2+\omega^2)}$$

Теперь посмотрим на 30.1:

30.1 $\quad \epsilon''(\omega) = \dfrac{(\varepsilon_0 - 1)\nu\omega}{\omega^2 + \nu^2}$, $\varepsilon_0, \nu = const$ $\quad \epsilon'(\omega)$ - ?

Как вы понимаете, здесь уже надо пользоваться другой формулой:

$$\varepsilon'(\omega) = 1 + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon''(x)}{x-\omega}dx$$

Пользуемся, подставляя туда $\varepsilon''(x)$ из условия, не забывая при этом менять в формуле из условия менять ω на x:

$$\epsilon'(\omega) = 1 + \frac{(\varepsilon_0 - 1)\nu}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,dx}{(x^2+\nu^2)(x-\omega)}$$

Видите, как в знаменателе было $(\omega^2+\nu^2)$, а стало $(x^2+\nu^2)$, в числителе было $\nu\omega$, а стало $x\nu$? Вот как раз.

Мы вновь получили интеграл. Разумеется, мы вновь не будем брать интеграл методами ТФКП. Есть Вольфрам для таких дел:

$$F(x) = \frac{-\omega ln(\nu^2 + x^2) + 2\omega \ln(x - \omega) + 2\nu arctg(\frac{x}{\omega})}{2(\nu^2 + \omega^2)}$$

Считаем $F(+\infty) - F(-\infty\ )$:

$$\lim_{N\to\infty}[F(N) - F(-N)]$$
$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2(\nu^2+\omega^2)} * (-\omega ln(\nu^2 + N^2) + \omega ln(\nu^2 + (-N)^2)$$
$$+ 2\omega \ln(N - \omega) - 2\omega \ln(-N - \omega) + 2\nu * \frac{\pi}{2} - 2\nu * \left(-\frac{\pi}{2}\right))$$

$-\omega ln(\nu^2 + N^2) + \omega ln(\nu^2 + (-N)^2)$ в сумме взаимоуничтожатся, так что будет

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2(\nu^2+\omega^2)} (2\omega \ln(N - \omega) - 2\omega \ln(-N - \omega) + 2\nu\pi)$$

Преобразуем разность логарифмов в произведение:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{(\nu^2+\omega^2)} (\omega \ln\frac{N-\omega}{N+\omega} + \nu\pi)$$

При стремлении N->+∞ аргумент логарифма будет стремиться к 1, а сам логарифм к 0. В итоге получаем

$$\frac{\nu\pi}{\nu^2+\omega^2}$$

Подставляем подсчитанный интеграл, получаем ответ, как у Чугреева:

$$\epsilon'(\omega) = 1 + \frac{(\varepsilon_0 - 1)\nu}{\pi} I(\omega) = 1 + \frac{(\varepsilon_0 - 1)\nu^2}{\omega^2 + \nu^2}$$

Заключительные слова. Эмпирическое правило: ***вычислив первообразную Вольфрамом, выкиньте все логарифмы, оставив только арктангенс.*** Как мы увидели из двух примеров, в обоих логарифмы при подстановке в Ньютона-Лейбница занулились. Но я не уверен, что так будет всегда.